

Équations différentielles

Définitions + solutions types + conditions initiales
Résumé simple et organisé pour les élèves du Bac

1. Définition

Équation différentielle

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction y et où apparaissent y' , y'' , etc.

Exemple

$$y' = 2y$$

Attention

La solution est une fonction, pas un nombre.

2. Équation $y' = ay$

Solution générale

$$y' = ay \implies y(x) = Ce^{ax}$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Exemple

$$y' = 3y \implies y(x) = Ce^{3x}$$

Condition initiale

Si $y(x_0) = y_0$, on remplace pour déterminer C .

3. Équation $y' = ay + b$

Solution générale

Si $a \neq 0$, alors :

$$y' = ay + b \implies y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

Exemple

$$y' = 2y + 4 \implies y(x) = Ce^{2x} - 2$$

Solution constante

$-\frac{b}{a}$ est une solution particulière constante.

4. Équation $y' + ay = b$

Solution

Si $a \neq 0$, alors :

$$y' + ay = b \implies y(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

Exemple

$$y' + 3y = 6 \implies y(x) = Ce^{-3x} + 2$$

Méthode

Reconnaître le type, écrire la solution générale, puis utiliser la condition initiale s'il y en a une.

5. Équations du second ordre classiques

Cas oscillatoire

$$y'' + \omega^2 y = 0 \implies y(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

Cas exponentiel

$$y'' - \omega^2 y = 0 \implies y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$$

Attention au signe

Le signe devant $\omega^2 y$ change complètement la forme des solutions.

6. Résumé

Checklist

Reconnaître le type, écrire la forme générale, utiliser les conditions initiales, puis vérifier la solution en remplaçant.

Erreurs à éviter

Confondre $y' = ay + b$ et $y' + ay = b$, oublier C , oublier qu'une équation d'ordre 2 donne deux constantes.

Formules clés

$$y' = ay \implies y = Ce^{ax}$$

$$y' + ay = b \implies y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$