

Géométrie dans l'espace

Produit scalaire + produit vectoriel + plans et droites

Résumé simple et organisé pour les élèves du Bac

1. Repère et vecteurs

Repère orthonormé

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point A a pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) .

Vecteur

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors :

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Norme

Si $\vec{u} = (x, y, z)$, alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2. Produit scalaire

Définition

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

Formule analytique

Si $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Orthogonalité

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

3. Droites et plans

Droite paramétrique

Une droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur (α, β, γ) s'écrit :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$$

Plan cartésien

Si $\vec{n} = (a, b, c)$ est un vecteur normal à un plan, alors une équation du plan est :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Plan par un point

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

4. Produit vectoriel

Définition

Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} .

Formule

Si $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$, alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$$

Colinéarité

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

5. Applications

Trouver un vecteur normal

Si deux vecteurs du plan sont connus, alors leur produit vectoriel donne un vecteur normal au plan.

Distance point-plan

Pour $P : ax + by + cz + d = 0$ et $M(x_M, y_M, z_M)$:

$$d(M, P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Aire d'un triangle

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

6. Résumé

Checklist

Calculer les vecteurs utiles, utiliser le produit scalaire pour angles et orthogonalité, le produit vectoriel pour un normal, puis écrire l'équation du plan si demandé.

Erreurs à éviter

Confondre produit scalaire et produit vectoriel, oublier les coordonnées du normal, oublier la valeur absolue dans une distance.

Formules clés

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= xx' + yy' + zz' \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx') \end{aligned}$$