

# Limites et continuité

Définitions + limites usuelles + opérations + continuité  
Résumé simple et organisé pour les élèves du Bac

## 1. Limite en un point

### Définition

Dire que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  signifie que  $f(x)$  se rapproche de  $L$  quand  $x$  se rapproche de  $a$ .

### Condition d'existence

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

### Exemple

Pour  $f(x) = 2x + 1$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

## 2. Limites infinies

### Limite infinie en un point

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

signifie que  $f(x)$  devient arbitrairement grande quand  $x \rightarrow a$ .

### Asymptote verticale

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ , alors la droite  $x = a$  est une asymptote verticale.

### Limite à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

signifie que la courbe se rapproche de la droite horizontale  $y = L$ .

## 3. Opérations sur les limites

### Règles

Si  $\lim f = L$  et  $\lim g = M$ , alors :

$$\lim(f + g) = L + M, \quad \lim(fg) = LM$$

$$\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

### Formes indéterminées

$$\infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty$$

Il faut transformer l'expression avant de conclure.

### Méthodes classiques

Factoriser, réduire au même dénominateur, rationaliser, diviser par la plus grande puissance.

## 4. Continuité

### Continuité en un point

$f$  est continue en  $a$  si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

### Sur un intervalle

$f$  est continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

### Fonctions continues usuelles

Les polynômes sont continus sur  $\mathbb{R}$ . Les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

## 5. Théorème des valeurs intermédiaires

### TVI

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors toute valeur comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$  est prise par  $f$ .

### Conséquence

Si  $f(a)f(b) < 0$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $]a, b[$ .

### À ne pas oublier

Pour utiliser le TVI, il faut vérifier la continuité sur l'intervalle.

## 6. Limites usuelles à retenir

### Classiques

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad (n \geq 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{si vu en cours})$$

### Checklist

Déterminer le domaine, reconnaître la forme, traiter l'indétermination, puis conclure.

### Erreurs à éviter

Ne pas confondre continuité et dérivabilité. Ne pas oublier les limites à gauche et à droite.